

Eine exakte Lösung der instationären Couette-Strömung

Steinheuer, Johannes

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 17, 1965,
S.154-164



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Eine exakte Lösung der instationären Couette-Strömung

Von J. Steinheuer

Vorgelegt von H. Schlichting

(Eingegangen am 21. 7. 1965)

Übersicht: Es wird eine exakte Lösung der instationären inkompressiblen Couette-Strömung für den Fall angegeben, daß bei einer voll ausgebildeten Couette-Strömung die zunächst ruhende Begrenzungswand plötzlich auf eine konstante Geschwindigkeit von beliebigem Betrag gebracht wird. Es wird gezeigt, daß der Reibungsbeiwert an der plötzlich in Gang gesetzten Wand für kleine Zeiten extrem hohe Werte annimmt. An Hand einiger Beispielrechnungen wird der physikalische Sachverhalt verdeutlicht.

Summary- An exact solution of the non-steady incompressible Couette-flow is presented for the case where in a fully developed Couette-flow the boundary initially at rest is suddenly accelerated to an arbitrary velocity. It is shown that the skin friction coefficient at the suddenly accelerated wall assumes extremely high values for small values of time. The physical aspect of the problem is illustrated by a few sample calculations.

1. Einleitung

Bei instationären Strömungsvorgängen, insbesondere bei Grenzschichtströmungen, handelt es sich meist um Bewegungen aus der Ruhe heraus oder um periodische Bewegungen. Der erste Fall wird auch als Anfahrvorgang bezeichnet. Bei diesem Anfahrvorgang bildet sich in unmittelbarer Wandnähe eine zunächst sehr dünne Reibungsschicht aus, in welcher der Übergang vom Haften an der Wand auf die Geschwindigkeit der Außenströmung stattfindet. Die Dicke der Reibungsschicht nimmt dann mit der Zeit zu und nimmt schließlich für große Zeiten einen konstanten stationären Wert an, welcher der Lösung des entsprechenden stationären Problems entspricht. Von gleicher Art sind jedoch auch die Vorgänge, bei denen in einer bereits bestehenden Grenzschichtströmung plötzliche Änderungen stattfinden, z. B. durch ruckartige Beschleunigung der Wandgeschwindigkeit auf einen neuen konstanten Wert.

In der vorliegenden Arbeit wird der Fall behandelt, daß in einer voll ausgebildeten Couette-Strömung, bei welcher zunächst die untere Wand ruht und die obere Wand mit einer konstanten Geschwindigkeit geschleppt wird, die untere Wand ebenfalls plötzlich in Bewegung gesetzt wird. Dabei sind die Fälle, daß die untere Wand in gleicher Richtung oder in entgegengesetzter Richtung zur oberen Wand bewegt wird, einbegriffen. Der Betrag der Geschwindigkeit der unteren Wand kann beliebig sein. Für einige Spezialfälle sind die zeitlich veränderlichen Geschwindigkeitsprofile sowie die Reibungsbeiwerte an beiden Wänden ermittelt worden.

2. Bezeichnungen

c_{f1}, c_{f2}	Reibungsbeiwerte an der unteren bzw. der oberen Wand
c_n, d_n	konstante Faktoren in den Reihengliedern (siehe Gln. (5a) und (5b))
h	Abstand der parallelen Wände
n	laufender Summationsindex
$R_1(t'), R_2(t')$	zeitabhängige Reibungsfunktionen nach Gln. (16) und (18)
$Re = \frac{U_0 h}{\nu}$	Reynoldszahl
$S(t', \eta)$	Summenfunktion nach Gl. (12)
t	Zeit
$t' = \frac{\nu t}{h^2}$	dimensionslose Zeit
$u = u(y)$	Geschwindigkeitsverteilung
U_0	konstante Geschwindigkeit der oberen Wand
x, y	Koordinaten (siehe Abb. 1)
α	Konstante nach Gl. (2)
$\eta = \frac{y}{h}$	dimensionslose Koordinate
μ	dynamische Zähigkeit
ν	kinematische Zähigkeit
ϱ	Dichte
τ_{W1}, τ_{W2}	Wandschubspannungen an der unteren bzw. oberen Wand nach Gln. (13) und (14)

3. Die Problemstellung

Die Problemstellung wird durch die Folge der Skizzen a bis d in Abb. 1 erläutert. Zu einer Zeit $t < 0$ (Skizze a) bestehe eine vollausgebildete Couette-Strömung mit einer linearen Geschwindigkeitsverteilung der Form

$$\frac{u}{U_0} = \frac{y}{h} \quad (1)$$

Bei $y = 0$ ist $u = 0$ (Haftbedingung an der unteren Wand) und bei $y = h$ ist $u = U_0$ (Haftbedingung an der oberen Wand). Zum Zeitpunkt $t = 0$ (Skizze b) werde die untere Wand plötzlich auf eine konstante Geschwindigkeit αU_0 gebracht. Die durch diese Störung bewirkte Deformierung der Geschwindigkeitsverteilung breitet sich mit endlicher Geschwindigkeit in y -Richtung aus, wie in Skizze c angedeutet ist, d. h. für jeden Zeitpunkt $t > 0$ ergibt sich eine neue Geschwindigkeitsverteilung. Dieser Ausgleichvorgang dauert so lange an, bis für große Zeiten t (Skizze d) sich schließlich ein neuer stationärer Zustand einstellt, bei dem die Geschwindigkeitsverteilung die Form

$$\frac{u}{U_0} = (1 - \alpha) \frac{y}{h} + \alpha \quad (2)$$

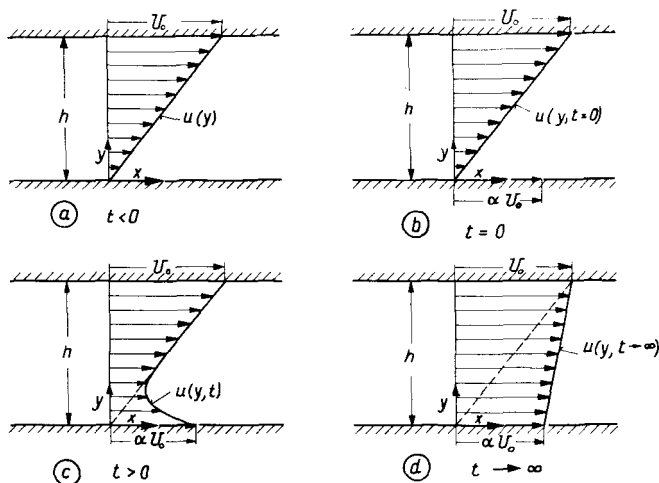


Abb. 1. Die instationäre Couette-Strömung (schematisch)

annimmt. Das gestellte Problem besteht also darin, Lösungen für die Geschwindigkeitsverteilung zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ anzugeben. Dieses Problem ist eng verwandt mit den in [1] angegebenen Problemen der plötzlich in Gang gesetzten ebenen Wand (erstes Stokessches Problem) und dem zeitlichen Anlauf bei der Couette-Strömung.

4. Lösung der Differentialgleichung

Wie ebenfalls in [1] gezeigt, lautet die zu lösende Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3)$$

mit den Rand- bzw. Anfangsbedingungen

$$t \leq 0: \quad u = U_0 \frac{y}{h} \quad (4a)$$

$$\left. \begin{aligned} t > 0: \quad u &= \alpha U_0 \text{ für } y = 0 \\ u &= U_0 \text{ für } y = h \end{aligned} \right\} \quad (4b)$$

Die Differentialgleichung (3) ist identisch mit der Wärmeleitungsgleichung, welche die Ausbreitung der Wärme von einer Seite einer unendlich ausgedehnten Platte endlicher Dicke h zur anderen Seite beschreibt. Wegen dieser Analogie zwischen der Wärmeausbreitung und dem vorliegenden Strömungsproblem werden die bekannten Methoden aus der Theorie zeitlich veränderlicher Temperaturfelder ohne Wärmequellen benutzt (siehe [2] und [3]). Als Lösungen der partiellen Differentialgleichung (3) kommen in Frage

$$\frac{u}{U_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{-n^2 \pi^2 \nu t}{h^2}} \sin\left(\frac{n \pi y}{h}\right) \quad (5a)$$

oder

$$\frac{u}{U_0} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{\frac{-n^2 \pi^2 \nu t}{h^2}} \cos\left(\frac{n \pi y}{h}\right) \quad (5b)$$

wobei der Plattenabstand h nicht der Intervalllänge 2π , sondern der Länge π entsprechen soll.

Für $t = 0$ stellen die Gleichungen (5a) bzw. (5b) Fourierreihen dar, die nur Sinusglieder bzw. nur Kosinusglieder enthalten. Da im Intervall $(0, \pi)$ eine beliebige Funktion sich sowohl in eine Reihe, die nur Sinusglieder enthält, als auch in eine Reihe, die nur Kosinusglieder enthält, entwickeln läßt (vgl. [4]), soll im folgenden nur die Lösung nach Gl. (5a) verwendet werden.

Um auch die Randbedingung (4b) für $t \rightarrow \infty$ zu erfüllen, wird die triviale Lösung

$$\frac{u}{U_0} = (1 - \alpha) \frac{y}{h} + \alpha \quad (6)$$

der Lösung nach Gl. (5a) hinzugefügt. Die vollständige Lösung lautet dann

$$\frac{u}{U_0} = (1 - \alpha) \frac{y}{h} + \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{-n^2 \pi^2 \nu t}{h^2}} \sin\left(\frac{n \pi y}{h}\right) \quad (7)$$

Die Koeffizienten c_n sind nun noch aus der Anfangsbedingung zur Zeit $t = 0$ zu ermitteln, nämlich $u/U_0 = y/h$. In die Lösung nach Gl. (7) eingesetzt, ergibt dies ($t = 0$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n \pi y}{h}\right) = \alpha \left(\frac{y}{h} - 1\right) \quad (8)$$

Die Koeffizienten c_n erhält man nach der Formel, vgl. [4],

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\alpha}{\pi} (\xi - \pi) \sin(n \xi) d\xi, \quad (9)$$

wobei $\xi = \pi y/h$ gesetzt wurde. Nach Ausführen der Integration ergibt sich

$$c_n = -\frac{2\alpha}{n\pi}. \quad (10)$$

Damit ist die vollständige Lösung, welche alle Anfangs- und Randbedingungen erfüllt, gegeben durch:

$$\frac{u}{U_0} = (1 - \alpha) \frac{y}{h} + \alpha [1 - S(t', \eta)] \quad (11)$$

mit

$$S(t', \eta) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{-n^2 \pi^2 \nu t}{h^2}} \sin\left(\frac{n \pi y}{h}\right). \quad (12)$$

Als wichtige Kenngrößen seien noch die Wandschubspannungen an der unteren und an der oberen Wand angegeben

$$\tau_{W1} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\mu U_0}{h} \left[1 - \alpha \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-n^2 \pi^2 \nu t}{h^2}} \right) \right] \quad (13)$$

und

$$\tau_{W2} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=h} = \frac{\mu U_0}{h} \left[1 - \alpha \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{-n^2 \pi^2 \nu t}{h^2}} \right) \right]. \quad (14)$$

Daraus ergeben sich die dimensionslosen Reibungsbeiwerte $c_f = \tau_W / \left(\frac{\rho}{2} U_0^2 \right)$ zu:

$$\frac{1}{2} c_{f1} Re = 1 - \alpha [1 + R_1(t')] \quad (15)$$

mit

$$R_1(t') = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-n^2 \pi^2 \nu t}{h^2}} \quad (16)$$

und

$$\frac{1}{2} c_{f2} Re = 1 - \alpha [1 + R_2(t')] \quad (17)$$

mit

$$R_2(t') = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{-n^2 \pi^2 \nu t}{h^2}} \quad (18)$$

und

$$Re = \frac{\rho U_0 h}{\mu}.$$

5. Auswertung der Lösung und Beispielrechnungen

Angeichts der komplizierten Summenformeln in der Lösung und in den Ausdrücken für die Reibungsbeiwerte erscheint es zweckmäßig, die vorkommenden Reihensummen explizit auszuwerten. Mit $\eta = y/h$ und $t' = \nu t/h^2$ als dimensionslosen Variablen wurden deshalb die Funktionen $S(t', \eta)$, $R_1(t')$ und

$R_2(t')$ nach Gln. (12), (16) und (18) mit Hilfe der elektronischen Digitalrechenmaschine Siemens 2002 der DFL ausgerechnet. Der Variabilitätsbereich wurde dabei wie folgt festgelegt:

für t' :	0,0002	[0,0001]	0,0009
	0,001	[0,001]	0,009
	0,01	[0,01]	0,09
	0,1	[0,1]	0,9
	1	[1]	2
für η :	0	[0,05]	1

Der Wert in den eckigen Klammern gibt die jeweilige Intervalllänge an. Bei der Ausrechnung wurde so vorgegangen, daß die Einzelterm der konvergierenden Reihe Gl. (12) mit wachsenden n solange berechnet wurden, bis der Faktor $e^{-n^2 \pi^2 t'} < 10^{-6}$ geworden war. Die Funktionswerte $S(t', \eta)$, $R_1(t')$ und $R_2(t')$ wurden auf 5 Stellen nach dem Komma mit Rundung auf der letzten angegebenen Stelle ausgedruckt. In Abb. 2 sind die Ergebnisse für einige ausgewählte t' -Werte graphisch dargestellt.

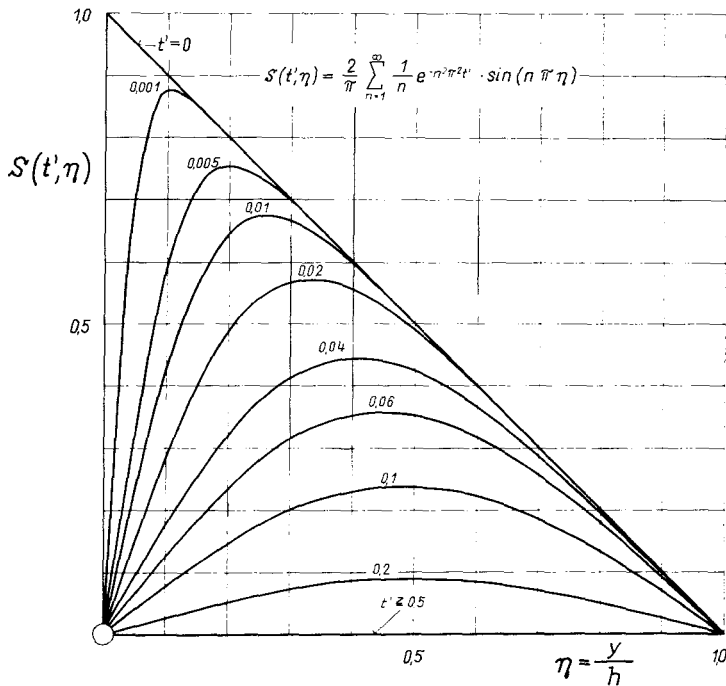
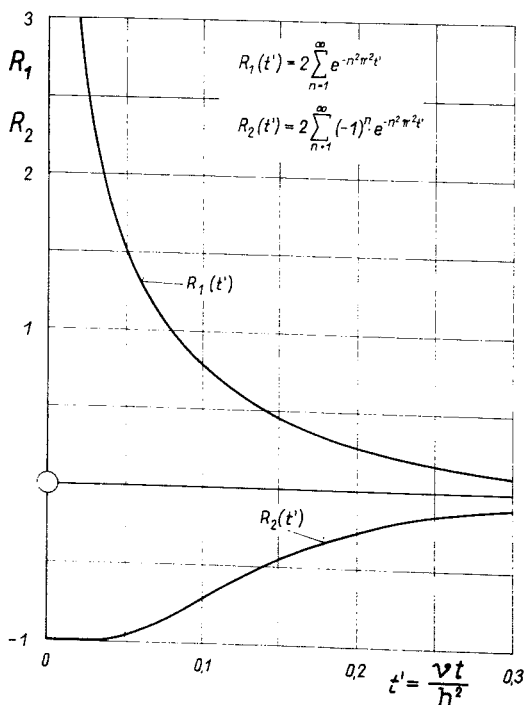


Abb. 2. Die Funktion $S(t', \eta) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2 \pi^2 t'} \sin(n \pi \eta)$

Tabelle 1. Die Funktionen $R_1(t')$ und $R_2(t')$

t'	$R_1(t')$	$R_2(t')$	t'	$R_1(t')$	$R_2(t')$
0	∞	-1,0	0,02	2,98942	-0,99997
0,0002	38,8942	-1,0	0,03	2,25735	-0,99843
0,0003	31,5735	-1,0	0,04	1,82095	-0,98911
0,0004	27,2095	-1,0	0,05	1,52313	-0,96600
0,0005	24,2313	-1,0	0,06	1,30329	-0,92858
0,0006	22,0329	-1,0	0,07	1,13244	-0,88009
0,0007	20,3244	-1,0	0,08	0,99473	-0,82472
0,0008	18,9471	-1,0	0,09	0,88069	-0,76614
0,0009	17,8063	-1,0	0,1	0,78429	-0,70710
0,001	16,8412	-1,0	0,2	0,27857	-0,27708
0,002	11,6157	-1,0	0,3	0,10356	-0,10353
0,003	9,30064	-1,0	0,4	0,03859	-0,03859
0,004	7,92062	-1,0	0,5	0,01438	-0,01438
0,005	6,97885	-1,0	0,6	0,00536	-0,00536
0,006	6,28366	-1,0	0,7	0,00200	-0,00200
0,007	5,74336	-1,0	0,8	0,00074	-0,00074
0,008	5,30783	-1,0	0,9	0,00028	-0,00028
0,009	4,94708	-1,0	1,0	0,00010	-0,00010
0,01	4,64190	-1,0	2,0	0,00000	-0,00000

Abb. 3.
Die Funktionen

$$R_1(t') = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t'}$$

und

$$R_2(t') = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 t'}$$

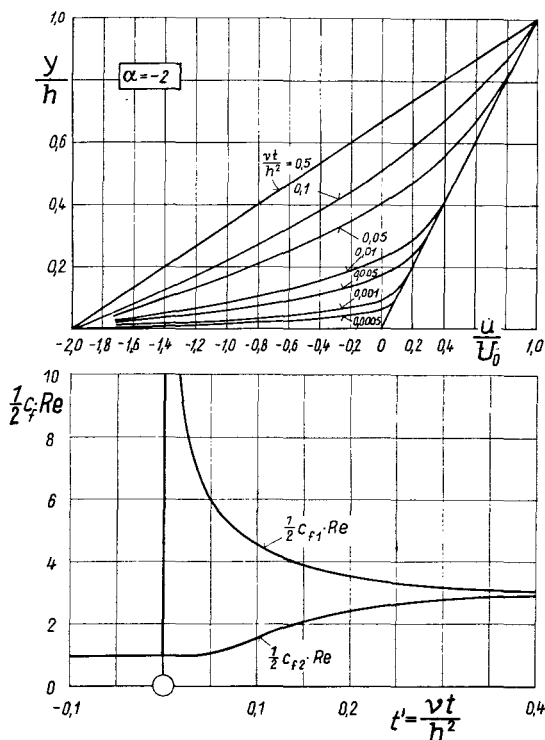
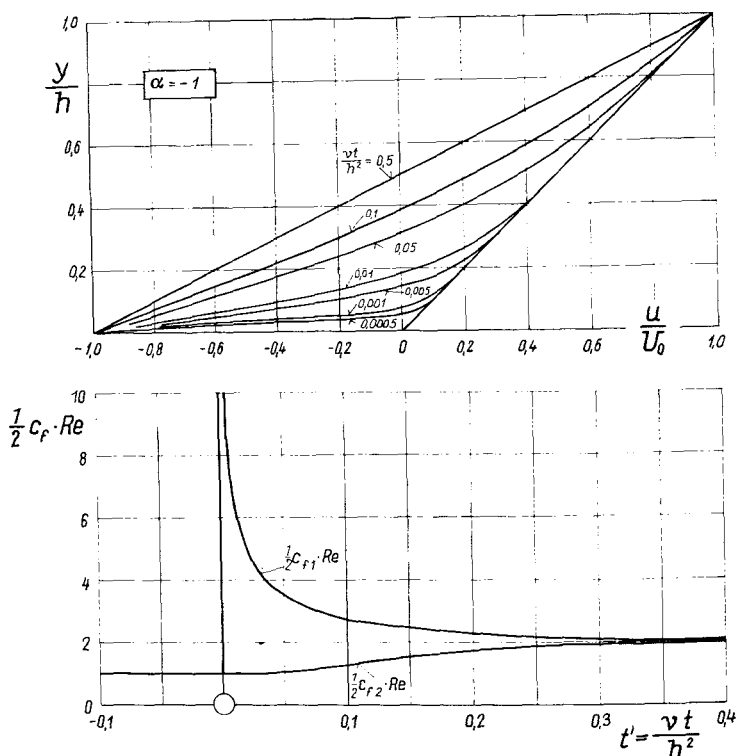


Abb. 4.

Geschwindigkeitsverteilung und Reibungswerte in Abhängigkeit von der Zeit ($\alpha = -2$)

Dabei kann die Auftragung der zeitlichen Entwicklung der Funktion $S(t', \eta)$ nach Gl. (12) in dieser Abbildung auch direkt interpretiert werden als eine Couette-Strömung, bei der bis zum Zeitpunkt $t = 0$ die obere Wand ruhte und die untere Wand mit der Einheitsgeschwindigkeit geschleppt wurde. Zur Zeit $t = 0$ wird dann die untere Wand plötzlich auf den Wert Null gebremst. Das zeitliche Abklingen der Flüssigkeitsbewegung zwischen den beiden Wänden wird in Abb. 2 dargestellt. Der kleinste, mit Hilfe des ausgearbeiteten Programms auswertbare Wert der dimensionslosen Zeit betrug $t' = 0,0002$. Hierfür mußten etwa 100 Reihenglieder berechnet werden, bevor das erwähnte Kriterium, daß $e^{-n^2 \pi^2 t'} < 10^{-6}$ sei, erfüllt wurde. Für $t' = 0,0001$ überstieg n den Wert 100. Dagegen genügte für den größten verwendeten Wert $t' = 2$ bereits ein Glied, um die Schranke von 10^{-6} zu unterschreiten.

Von besonderem Interesse sind die Reibungsbeiwerte $c_{f1} \cdot Re$ und $c_{f2} \cdot Re$, die durch die Funktionen $R_1(t')$ und $R_2(t')$ nach den Gln. (16) und (18) charakterisiert sind. Sie sind in Tabelle 1 wiedergegeben, und ihr Verlauf ist in Abb. 3 dargestellt. Für $t' \rightarrow 0$ strebt $R_1(t')$ (Reibungsbeiwert an der unteren, plötzlich in Gang gesetzten Wand) gegen Unendlich, d. h. $t = 0$ stellt eine Singularität dar. $R_2(t')$ dagegen behält über einen relativ großen

Abb. 5. Geschwindigkeitsverteilung und Reibungsbeiwerte in Abhängigkeit von der Zeit ($\alpha = -1$)

Zeitbereich (bis etwa $t' = 0,02$) seinen Anfangswert $R_2(t') = -1$ bei, um dann langsam auf Null anzusteigen. Das bedeutet, daß die Störung erst nach einer Zeit von $t' \approx 0,02$ die obere Wand erreicht. Von einem Wert $t' \approx 0,3$ an sind dann $R_1(t')$ und $R_2(t')$ bei entgegengesetztem Vorzeichen ihrem Betrage nach gleich, d. h. etwa von diesem Zeitwert an nimmt die Funktion $S(t', \eta)$ eine Parabelform an. Folgende wichtige physikalische Folgerung ist demnach aus der vorliegenden Untersuchung zu ziehen: Bei plötzlichem Ingangsetzen oder auch sehr starker Beschleunigung der unteren, bis zum Zeitpunkt $t = 0$ ruhenden Wand einer Couette-Strömung steigt die Wandschubspannung an dieser Wand zu erheblichen Werten an. Das gleiche gilt für entsprechende Grenzschichtprobleme. Eine Untersuchung der gleichen Art, wie sie hier für die Couette-Strömung durchgeführt worden ist, ist also auch für die instationäre Grenzschicht wünschenswert.

Zur Erläuterung der behandelten instationären Couette-Strömung sind einige Beispiele gerechnet worden. Diese umfassen die Fälle $\alpha = -2, -1, +1$ und $+2$.

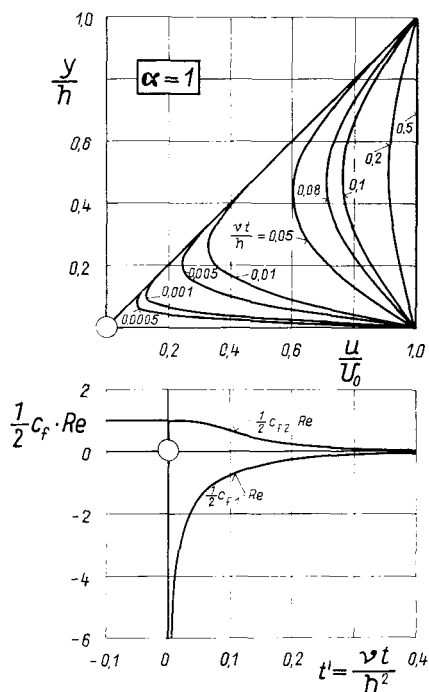
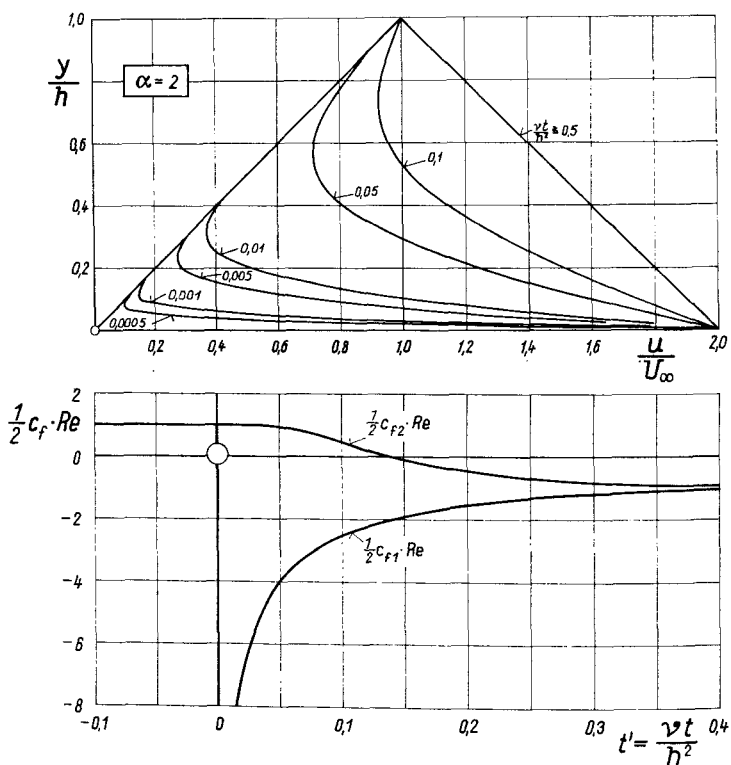


Abb. 6.
Geschwindigkeitsverteilung und Reibungsbeiwerte in Abhängigkeit von der Zeit ($\alpha = 1$)

Die Geschwindigkeitsverteilungen sind jeweils für die Werte $t' = 0; 0,0005; 0,001; 0,005; 0,01; 0,05; 0,1$ und $0,5$ in den Abbildungen 4 bis 7 dargestellt. Außerdem enthalten diese Bilder den Verlauf der Reibungsbeiwerte c_{f1} und c_{f2} . Hieraus ist noch einmal deren zeitliches Verhalten zu ersehen.

6. Zusammenfassung

Für das Problem der instationären inkompressiblen Couette-Strömung, bei der die bis zum Zeitpunkt $t = 0$ ruhende Wand plötzlich auf eine von Null verschiedene Geschwindigkeit gebracht wird, wird eine exakte Lösung der instationären partiellen Differentialgleichung $(\partial u / \partial t) = \nu (\partial^2 u / \partial y^2)$ angegeben. Die als unendliche Reihe gegebene Lösung wurde mit Hilfe eines elektronischen Digitalrechners für eine Reihe von Zeitpunkten berechnet und graphisch dargestellt. Einige ausgeführte Beispielrechnungen verdeutlichen den physikalischen Sachverhalt. Das wichtigste Ergebnis der Untersuchung ist die Folgerung, daß bei plötzlichem Ingangsetzen oder auch sehr starker Beschleunigung einer Begrenzungswand sowohl bei einer Couette-Strömung als auch bei Wandgrenzschichten die Wandschubspannung extrem hohe Werte annehmen kann.

Abb. 7. Geschwindigkeitsverteilung und Reibungsbeiwerte in Abhängigkeit von der Zeit ($\alpha = 2$)

7. Literatur

- [1] H. Schlichting: Grenzschicht-Theorie, 5. Auflage, 1965, Karlsruhe.
- [2] Gröber, Erk, Grigull: Grundgesetze der Wärmeübertragung, 3. Auflage, 1955, Berlin.
- [3] M. Jakob: Heat Transfer. Vol. I, 1949, New York/London.
- [4] W. I. Smirnow: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil II. 6. Auflage, 1964, Berlin.